

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE

OLIMPIJADA ZNANJA 2024

MATEMATIKA

za VII razred osnovne škole

1. Na stranici  $AB$  trougla  $ABC$  označena je tačka  $M$ , a na stranici  $AC$  tačka  $N$  tako da je  $BM = 3AM$  i  $CN = 3AN$ . Dokazati da je  $MN \parallel BC$ . Odrediti dužinu duži  $MN$  ako je  $BC = 16\text{cm}$ .
2. Za numerisanje školskih ormarića koriste se plastične cifre koje koštaju 2 centa po komadu. Tako je, na primjer, za numerisanje ormarića broj 5 potrebno 2 centa, dok je za numerisanje ormarića broj 134 potrebno 6 centi. Škola je za numerisanje svih školskih ormarića potrošila 139,78€. Koliko ormarića ima u toj školi, ako numerisanje kreće od broja 1?
3. Marko, Petar i Ana žele da se igraju klikerima. Marko je iz korpe uzeo polovinu klikera i još jedan kliker. Potom je Petar uzeo četvrtinu od preostalih klikera i još jedan kliker. Na kraju je Ana uzela petinu od preostalih klikera i još jedan. Koliko je klikera bilo u korpi na početku, ako se sada u njoj nalazi 15 klikera?
4. Naći proste brojeve  $p$  i  $q$  i prirodan broj  $r$  takve da važi  $2p + 7q + 6r = 2024$ .
5. Dat je konveksan četvorougao  $ABCD$  čije su stranice  $AB$  i  $CD$  tačkama  $M$  i  $N$ , odnosno  $P$  i  $Q$  podijeljene na po tri jednaka dijela. Dokazati da je površina četvorougla  $MNPQ$  jednaka trećini površine četvorougla  $ABCD$ .

**Vrijeme rada: 180 minuta.**

**Svaki zadatak se boduje od 0 do 20 poena.**

**Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.**

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE

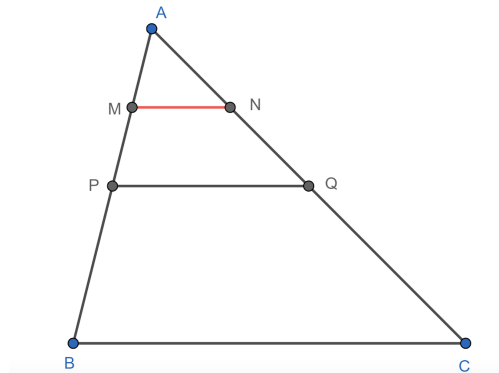
OLIMPIJADA ZNANJA 2024

MATEMATIKA

za VII razred osnovne škole

1. Na stranici  $AB$  trougla  $ABC$  označena je tačka  $M$ , a na stranici  $AC$  tačka  $N$  tako da je  $BM = 3AM$  i  $CN = 3AN$ . Dokazati da je  $MN \parallel BC$ . Odrediti dužinu duži  $MN$  ako je  $BC = 16cm$ .

Rješenje:



Označimo sa  $P$  središte stranice  $AB$  a sa  $Q$  središte stranice  $AC$  trougla  $ABC$ .  $PQ$  je srednja duž trougla  $ABC$  pa je  $PQ \parallel BC$  i važi  $PQ = \frac{1}{2}BC = 8cm$ . Posmatrajmo sada  $\triangle APQ$ . Kako je  $BM = 3AM$  i  $CN = 3AN$ , to znači da je  $AM = \frac{1}{4}AB$  i  $AN = \frac{1}{4}AC$ . Kako je  $AP = \frac{1}{2}AB$  i  $AQ = \frac{1}{2}AC$ , to su tačke  $M$  i  $N$  redom središta stranica  $CP$  i  $CQ$  trougla  $APQ$ , pa je  $MN$  srednja duž trougla  $APQ$ . To znači da je  $MN \parallel PQ$  i važi  $MN = \frac{1}{2}PQ = 4cm$ . Kako je  $PQ \parallel BC$  i  $MN \parallel PQ$  to je i  $MN \parallel BC$ .  $\square$

2. Za numerisanje školskih ormarića koriste se plastične cifre koje koštaju 2 centa po komadu. Tako je, na primjer, za numerisanje ormarića broj 5 potrebno 2 centa, dok je za numerisanje

ormarića broj 134 potrebno 6 centi. Škola je za numerisanje svih školskih ormarića potrošila 139,78€. Koliko ormarića ima u toj školi, ako numerisanje kreće od broja 1?

**Rješenje:** Imamo devet ormarića koje numerišemo koristeći jednu cifru (to su ormarići 1, 2, 3, ..., 9). Za njihovu numeraciju potrebno je  $9 \cdot 0,02\text{€} = 0,18\text{€}$ . Ormarića za koje su potrebne po dvije cifre imamo 90 (to su ormarići 10, 11, ..., 99). Za njihovu numeraciju potrebno je  $90 \cdot 0,04\text{€} = 3,60\text{€}$ . Ormarića sa trocifrenim brojem imamo 900 (to su ormarići 100, 101, ..., 999), pa je za njihovu numeraciju potrebno  $900 \cdot 0,06\text{€} = 54\text{€}$ . Možemo primijetiti da nećemo imati ormariće sa petocifrenim brojem. Neka ima  $x$  ormarića sa četvorocifrenim brojem. Za njihovu numeraciju potrebno je  $x \cdot 0,08\text{€}$ . Kako je ukupna cijena numerisanja bila 139,78€ to dobijamo jednadžbu:  $0,18 + 3,60 + 54 + 0,08x = 139,78$  čije je rješenje  $x = 1025$ . Dakle, ukupno u školi ima  $9 + 90 + 900 + 1025 = 2024$  ormarića.  $\square$

3. Marko, Petar i Ana žele da se igraju klikerima. Marko je iz korpe uzeo polovinu klikera i još jedan kliker. Potom je Petar uzeo četvrtinu od preostalih klikera i još jedan kliker. Na kraju je Ana uzela petinu od preostalih klikera i još jedan. Koliko je klikera bilo u korpi na početku, ako se sada u njoj nalazi petnaest klikera?

**Rješenje 1:** Prvo ćemo odrediti koliko je Ana uzela klikera, ne izračunavajući koliko su uzeli Marko i Petar. Naime, nakon što Ana uzme petinu od preostalih klikera i još jedan, u korpi ostaje  $z - (\frac{1}{5}z + 1) = \frac{4}{5}z - 1 = 15$ . Dakle, 20 klikera je ostalo pošto su Marko i Petar uzeli klikere. Slično, Petar je uzeo četvrtinu od preostalih klikera i još jedan kliker, pa je u korpi ostalo  $y - (\frac{1}{4}y + 1) = \frac{3}{4}y - 1 = 20$ , odakle dobijamo da je  $y = 28$  - broj klikera koji je ostao u korpi nakon što je Marko uzeo klikere. Marko je uzeo  $\frac{1}{2}x + 1$  klikera, gdje je  $x$  broj klikera koji je na početku bio u korpi. To znači da je u korpi ostalo  $x - (\frac{1}{2}x + 1) = \frac{1}{2}x - 1 = 28$ , pa je  $x = 58$ . Dakle, u korpi je bilo 58 klikera.

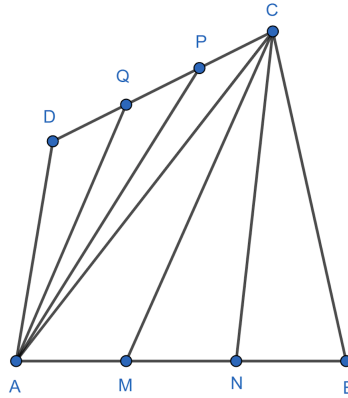
**Rješenje 2:** Neka je u korpi na početku bilo  $x$  klikera. Kako Marko uzima  $\frac{1}{2}x + 1$  klikera, to u korpi ostaje  $x - (\frac{1}{2}x + 1) = \frac{1}{2}x - 1$  klikera. Zatim Petar uzima  $\frac{1}{4}(\frac{1}{2}x - 1) + 1 = \frac{1}{8}x + \frac{3}{4}$ . U korpi je ostalo  $\frac{1}{2}x - 1 - (\frac{1}{8}x + \frac{3}{4}) = \frac{3}{8}x - \frac{7}{4}$ . Zatim Ana uzima  $\frac{1}{5}(\frac{3}{8}x - \frac{7}{4}) + 1 = \frac{3}{40}x + \frac{13}{20}$ , što znači da u korpi ostaje  $\frac{3}{8}x - \frac{7}{4} - (\frac{3}{40}x + \frac{13}{20}) = \frac{3}{10}x - \frac{12}{5} = 15$ . Rješavanjem ove jednačine dobijamo  $x = 58$ . Dakle, u korpi je na početku bilo 58 klikera.  $\square$

4. Naći proste brojeve  $p$  i  $q$  i prirodan broj  $r$  takve da važi  $2p + 7q + 6r = 2024$ .

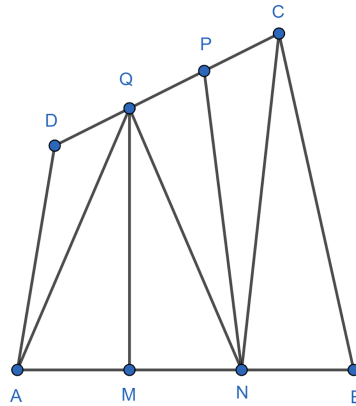
**Rješenje:** Primijetimo da su  $2p$ ,  $6r$  i  $2024$  djeljivi sa 2. Odatle slijedi da i  $7q$  mora biti djeljivo sa 2, a kako 7 nije djeljivo sa dva, to  $q$  mora biti djeljivo sa 2. S obzirom na to da je  $q$  prost, jedino je moguće da je  $q = 2$ . Početna jednačina se svodi na  $2p + 14 + 6r = 2024$ , odnosno  $2p + 6r = 2010$ . Dalje možemo zaključiti da su 2010 i  $6r$  brojevi koji su djeljivi sa 3, pa mora i  $2p$  biti djeljivo sa 3. Kako 2 nije djeljivo sa 3, to  $p$  mora biti djeljivo sa 3. Kako je i  $p$  prost broj, jedino je moguće da je  $p = 3$ . Sada lako dobijamo da je  $r = 334$ . Dakle, jedino moguće rješenje je:  $p = 3, q = 2, r = 334$ .  $\square$

5. Dat je konveksan četvorougao  $ABCD$  čije su stranice  $AB$  i  $CD$  tačkama  $M$  i  $N$ , odnosno  $P$  i  $Q$  podijeljene na po tri jednaka dijela. Dokazati da je površina četvorougla  $MNPQ$  jednaka trećini površine četvorougla  $ABCD$ .

**Rješenje:**



Primijetimo da je  $P_{\Delta AQD} = P_{\Delta APQ} = P_{\Delta ACP} = P_1$ . Ti trouglovi imaju zajedničku visinu iz tjemena A na stranice  $QD$ ,  $PQ$  i  $CP$  redom, koje su iste dužine. Slično,  $P_{\Delta CAM} = P_{\Delta CMN} = P_{\Delta CNB} = P_2$ , jer ti trouglovi imaju zajedničku visinu iz tjemena C na stranice  $AM$ ,  $MN$ ,  $NB$  redom, koje su iste dužine. Odatle slijedi da je  $3P_1 + 3P_2 = P$ , gdje je  $P$  površina četvorougla  $ABCD$ . Lako zaključujemo da je površina četvorougla  $ANCQ$  jednaka  $\frac{2}{3}P$ , jer su suma površina trouglova  $AQD$  i  $CNB$  jednaka  $P_1 + P_2 = \frac{P}{3}$ .



Posmatrajmo sada  $\triangle AMQ$  i  $\triangle MNQ$ . Ti trouglovi imaju jednaku površinu, jer imaju zajedničku visinu iz tjemena  $Q$  na jednake stranice  $AM$  i  $MN$  redom. Slično, i  $\triangle NPQ$  i  $\triangle NCP$  imaju jednake površine. Odatle zaključujemo da je površina četvorougla  $MNPQ$  jednaka jednoj polovini površine četvorougla  $ANCQ$ , a kako je površina četvorougla  $ANCQ$  jednaka  $\frac{2}{3}P$ , to dobijamo da je površina četvorougla  $MNPQ$  jednaka jednoj trećini površine četvorougla  $ABCD$ .

□